Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas.
Conferencia Gibbs. 1951

Kurt Gödel

Edición en inglés:
Some basic theorems on the foundations of Mathematics and their implications. (*1951).
en *Kurt Gödel. Collected Works. Volumen III. Unpublished Essays and Lectures.*
Edited by: Solomon Feferman – John W. Dawson Jr. – Warren Goldfarb – Charles Parsons – Robert Solovay.
Oxford University Press - 1995

Edición en español:
Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas (1951).
en *Kurt Gödel*. *Ensayos inéditos.*
Edición a cargo de Francisco Rodríguez Consuegra.
Mondadori. Barcelona. 1994.

Edición digital, versión 1.1:
Tecum. Mayo 2005

NOTAS PRELIMINARES A LA EDICIÓN EN ESPAÑOL.
Por: Francisco Rodríguez Consuegra
(Extractos de la nota preliminar extensa del original).

La presente selección

Entre los diversos materiales inéditos existentes en el *Nachlass* de Gödel, sin duda ofrecen mayor interés aquellos que estuvieron en principio destinados a la publicación, bien sea como conferencias o como artículos, por el mayor cuidado que Gödel debió poner en su redacción, sobre todo dado su extremo perfeccionismo a la hora de hacer públicas sus ideas. A su vez, de entre ellos no hay duda de que la conferencia Gibbs, y la serie de intentos de escribir una contribución al volumen sobre Carnap de la serle Schilpp, son los que presentan un carácter más filosófico. También entre los cientos de folios escritos en la taquigrafía Gabelsberger hay mucho material filosófico, pero parece que de un orden más dogmático, es decir menos argumentado.

La conferencia Gibbs destaca, entre las otras conferencias cuyo texto se conserva, precisamente por ser la más filosófica, a lo que hay que añadir además el interés de ser el documento en el que Gódel se extendió más en su intento de extraer implicaciones filosóficas de sus célebres resultados meta-matemáticos. El resto de las conferencias fueron mucho más técnicas, y estuvieron dedicadas mucho más a divulgar nuevos resultados que a analizar sus consecuencias filosóficas. El propio Gödel era plenamente consciente de la importancia filosófica del texto leído en Providence, en 1951, como lo prueba el que estuviera trabajando en él durante un año, y también el hecho de que a menudo, en sus conversaciones con Hao Wang y otros, se refiriese a él e incluso aludiese brevemente a su contenido filosófico. Sin embargo, dado el estado del manuscrito, sin duda necesitado de una reconstrucción que el propio Gödel no debió hallar tiempo ni ocasión para emprender, y quizá también debido a la típica inseguridad de Gödel respecto a sus ideas filosóficas, lo cierto es que por lo que sé jamás lo mostró a nadie, a pesar de que a veces le dijo a Hao Wang que pensaba mostrárselo, ante la impaciencia y posterior desesperación de éste al ver que el anuncio nunca se cumplía...

...

... tras haber finalizado los trabajos de reconstrucción, me enteré por Hao Wang de que entre los inéditos a aparecer en el tomo III de las *Collected Works* de Gödel se incluiría también la conferencia Gibbs y dos versiones del ensayo sobre Carnap. Sin embargo, como me informa el propio Wang, que ha podido comparar mí reconstrucción de la conferencia Gibbs con la que aparecerá en la edición oficial, el material que aparece en el presente libro es más amplio, sin duda porque finalmente decidí salvar cuanto fragmento fuera posible, incluso en casos en los que no se puede determinar su lugar en el texto principal.

...

El origen de los presentes manuscritos

Sobre la conferencia Gibbs es poco lo que he podido averiguar; y ello se debe en su totalidad a Hao Wang y John Dawson. En particular, se ignora exactamente cuándo recibió Gödel la invitación a darla, y también cómo, y a

través de quién, fue cursada. En todo caso, la conferencia fue leída el 26 de diciembre de 1951, a las 8 de la tarde, en la reunión anual de la American Mathematical Society, que tuvo lugar en la Brown University, en Providence, Rhode Island, EE. UU. Al parecer Gödel dedicó la mayor parte del año precedente a prepararla, sin duda muy interesado en dedicarse de nuevo abiertamente a tareas más filosóficas, tras su «declaración» pública de platonismo en los artículos de 1944 y 1947, Sin embargo, ciertas dificultades relacionadas con su mala salud le causaron problemas. En concreto, fue por entonces cuando una hemorragia en su úlcera de duodeno le obligó a un tratamiento hospitalario.

Según un asistente excepcional a la conferencia, Hao Wang, Gödel se limitó a leer muy rápidamente el manuscrito que llevaba preparado (incluyendo la cita final de Hermite), que a todas luces es el mismo cuya reconstrucción aparece aquí traducida. La concurrencia fue numerosa, en lo que debió ser una reunión plenaria de la sociedad, por lo que hay que suponer que la mayor parte de los asistentes fueron matemáticos. Sin embargo, al final no hubo coloquio alguno (quizá por iniciativa del propio Gödel), aunque sí un entusiástico aplauso, lo que es comprensible dado lo sumamente infrecuente de poder ver y oír personalmente a un genio de !a talla de Gödel.

No hay el menor indicio de que Gödel revisara el manuscrito tras leerlo en Providence. Sin embargo, su título aparece en una lista personal de trabajos «publicables» hallada entre sus papeles, lo cual no es de extrañar dada la calidad del material y la indudable facilidad con la que su autor hubiera podido rápidamente reconstruirlo, e incluso mejorarlo. Pero naturalmente ése era el problema casi insuperable para Gödel, habitualmente desbordado por un perfeccionismo rayano en lo patológico y por un miedo a la controversia rayano en lo paranoico. En concreto, por los años 1953 y 1954 Gödel respondió a diversas preguntas interesándose por el texto que estaba intentando publicarlo en el *Bulletin of the American Mathematical Society.* Pero es prácticamente seguro, no sólo que nunca llegó a someterlo a esa revista para su publicación, sino que ni siquiera avanzó lo más mínimo hacia ningún estadio próximo a hacerlo. En cuanto a su contenido, sólo ciertas alusiones fueron hechas con posterioridad en conversaciones y correspondencia con Hao Wang y otros, pero parece que Gödel nunca consintió en mostrarlo a nadie.

...

Los manuscritos originales: su reconstrucción y traducción

La conferencia Gibbs constituye sin la menor duda lo que John Dawson me describe en una carta reciente como «la pesadilla de un editor». El manuscrito original está en inglés, sin título, escrito de puño y letra de Gödel, usando siempre un lápiz y con restos evidentes de haber borrado una y otra vez y haber escrito encima de lo borrado. Además, Gödel cambió muchas veces de opinión respecto a lo que efectivamente debía leerse en Providence, así que existen numerosos fragmentos tachados. Como consecuencia sumamente indeseable de la escritura a lápiz (y con un tipo muy blando de grafito) tenemos que muchas partes del texto, con el paso de los años y los roces consiguientes, han quedado sumamente borrosas y a veces casi ilegibles. A todo ello hay que añadir un extraño esfuerzo de Gödel por ahorrar papel, lo cual se pone de manifiesto en una utilización exhaustiva de cada una

de las páginas, en las que no existe casi margen ni a los lados ni en los extremos superior e inferior: Ignoro si la muy frecuente abreviación de las palabras inglesas es también producto de semejante ansia ahorrativa, aunque lo más probable es que responda a la rapidez de su pensamiento en comparación con la lentitud de la escritura manual (especialmente a lápiz), lo cual fue quizá la razón de que muchas veces utilizase la taquigrafía Gabelsberger.

Para colmo, el manuscrito se compone de cuatro partes: el texto principal de la conferencia (número 040293 de catalogación, de 43 folios); las notas al pie de página (040295, 26 folios, y 040296, 5 folios) y las interpolaciones (040294, 18 folios). El problema con las interpolaciones es que no sólo hay que insertarlas, mediante un muy complicado sistema de claves gráficas, en el texto principal, sino también en el de las notas, e incluso a menudo en las interpolaciones mismas. Ello conduce a un sistema de referencias cruzadas de una complejidad casi intolerable, donde a veces se llega a trabajar con cinco y seis niveles (interpolación a la interpolación a la interpolación de una nota dividida en varios fragmentos, pertenecientes a páginas distintas, de un párrafo del texto principal, también fragmentado), todo ello muy a menudo escrito, borrado y reescrito, y con trozos tachados y otros también tachados pero con una nota indicando que la tachadura no vale.

Mi criterio principal de reconstrucción ha sido el de conservar el máximo posible de material, incluso en el caso de que finalmente no pudiera localizar éste en ningún contexto claro (en cuyo caso aparece en el apéndice final, que contiene varias notas e interpolaciones sueltas), e insertando también los párrafos, notas o interpolaciones finalmente tachados, preferentemente en los lugares que hubieran ocupado de haberse mantenido, los cuales aparecen en la versión aquí publicada entre corchetes dobles, es decir: [[ ]]. Esto no ha sido sin embargo posible siempre, así que hay fragmentos tachados que no aparecen en la versión finalmente publicada, lo cual, por cierto, vale también para algunos fragmentos muy breves originalmente válidos (es decir sin tachar). En los casos en que la lectura inglesa es imposible, o muy dudosa, he propuesto la mejor reconstrucción que he podido, aunque siempre indicando, con un signo de interrogación entre corchetes sencillos, es decir: [?], que mi lectura no está garantizada. Cuando no sólo la lectura es dudosa, pero completa, sino que cierto enunciado, o párrafo, se hace ilegible, o dudoso, en un momento dado, ofrezco la parte legible, seguida además de puntos suspensivos y el correspondiente signo de interrogación, o sea: ... [?]. Finalmente, mis propias (y escasas) interpolaciones aparecen siempre entre corchetes sencillos, a menos que se señale otra cosa.

En cuanto a la presentación final, me he visto obligado a abrir numerosos párrafos, dado que Gödel no se molestó en hacerlo en el manuscrito, el cual, de no ser por las interpolaciones y tachaduras, parecía destinado a constituir *un único párrafo,* quizá con el propósito de ahorrar más y más papel (y ello teniendo en cuenta que a veces el papel utilizado era de deshecho, y a veces ya dedicado a otros menesteres y borrado después), o bien con la mira puesta en manejar un manuscrito no demasiado extenso en el momento de la lectura. Por último, reproduzco en cursiva no sólo todo lo originariamente subrayado por Gödel, sino también los títulos de libros y revistas académicas, así como algunas letras usadas como símbolos y unos pocos términos en latín.

He incorporado sin comentarios todas las correcciones e interpolaciones al texto de la traducción, con objeto de mantener los textos de Gódel limpios de notas que no sean las suyas propias (excepto en el caso de la versión VI de la serie sobre Carnap, que como he dicho contiene notas mías remitiendo a la versión V). El criterio principal ha sido siempre ofrecer un texto lo más continuo posible, con la excepción, ya justificada, de incluir los pasajes tachados, que sin embargo son útiles para entender la versión definitiva. Una alternativa hubiese sido ofrecer tales alternativas en notas, pero creo que en su inmensa mayoría no alteran demasiado la lectura.

En cuanto a la traducción en sí, he procurado que sea más bien literal, teniendo en cuenta que el inglés de Gödel es el de un no nativo, y lo menos parafrástica posible. A veces la sintaxis o el léxico de Gödel no son correctos, pero me ha parecido ridículo señalar las incorrecciones, máxime tratándose de una traducción. Igualmente, he completado sin más las numerosas abreviaturas de la conferencia Gibbs, insertando una interrogación cuando ello no ha sido posible, o cuando es dudoso. En los casos en los que el propio Gödel utiliza neologismos he procurado mantenerlos de alguna forma en castellano. En cuanto a ciertos términos que hoy han sido abandonados en favor de otros más actuales, a veces he traducido directamente como si en el original figurasen los nuevos, con objeto de facilitar la lectura a quienes se hallen más familiarizados con ellos. Por último, la misma razón de eliminar notas me ha llevado a no justificar ni discutir mis opciones castellanas.

NOTAS PRELIMINAR PARA LA EDICIÓN WEB

El texto se ha digitalizado a partir de la edición en español. Sin embargo, se han incluido fragmentos de la edición en inglés, traducidos por mí, a efectos de complementar y aclarar el texto inicial.

Respecto a las notas se ha seguido el criterio de la edición inglesa de manera que se colocan al pie de página y no como un apéndice al final. Igualmente se ha mantenido la numeración de ellas como está en la edición en inglés, lo que puede permitir correlacionarlas con el manuscrito original.

Las interpolaciones y notas numeradas no incorporadas por el editor español al texto se han mantenido en un apéndice como él lo hace.

Puesto que esta es una edición digital he usado unas convenciones de colores y estilo de texto para distinguir las notas, los insertos, las interpolaciones y demás recursos de los editores. El lector podrá, a su criterio, reorganizar el material como prefiera.

Las principales convenciones de esta edición web son:

NG: Las notas de Gödel, numeradas según la secuencia de la edición en inglés y puestas a pie de página: NG1, NG2, NG3, etc.

Texto de la edición en inglés no existente en la edición en español: Principalmente en las notas al pie de página, pero también en lugares del texto principal, se han insertado en azul correcciones e interpolaciones que corresponden al texto establecido en la edición en inglés. Algunas de ellas aclaran los lugares donde el editor español indicó dudas marcando con [?].

IEE: Interpolaciones del editor español que no se encuentran en la edición en inglés. Destacadas entre corchetes rojos: [[IEE. ...]]

NEI : Notas del editor en la edición en inglés, traducidas por mí..

NI : Notas en las interpolaciones de la edición en español. También se han colocada al pie de página y corresponden a notas de Gödel. Se numeran sucesivamente: NI1, NI2, etc.

Algunos textos aclaratorios elaborados por el editor en español se incluyen entre corchetes [...]. Usualmente para corresponden a referencias bibliográficas.

Las dudas del editor en español acerca del texto definitivo se marcan según su estilo con un “ ... [?]”. Aquí esas dudas se ajustaron con el texto final establecido por los editores ingleses, de manera que se ha conservado una marca de color [?] y escribiendo el texto definitivo en azul.

NT: Algunas notas mías para la edición web se escriben en itálicas: [*NT: aaa*].

En la versión final, que formará parte de un compilado con textos de Frege, Russell, Hilbert, Bernays, Quine y otros, espero incluir el texto original en inglés

con su paginación exacta y digitalizado de los *Collected Works*, así como algunas aclaraciones textuales preparadas por los editores de la edición en inglés.

Se agradecen comentarios a la página del grupo.

Gibbs, 1951
USA

Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas

La investigación en los fundamentos de la matemática durante las últimas décadas ha producido algunos resultados que creo de interés, no sólo en sí mismos, sino también con respecto a sus implicaciones en los problemas filosóficos tradicionales sobre la naturaleza de la matemática. Pienso que los resultados mismos son ampliamente conocidos; sin embargo, creo que será útil presentarlos esquemáticamente de nuevo, especialmente en vista de que gracias al trabajo de varios matemáticos han adoptado una forma mucho más satisfactoria que la que tenían originalmente. La mejora más importante se hizo posible mediante la definición precisa del concepto de procedimiento finito[NG1], que desempeña un papel decisivo en tales resultados. Existen varias formas diferentes de llegar a tal definición, aunque todas ellas conducen exactamente al mismo concepto. En mi opinión, la forma más satisfactoria consiste en reducir el concepto de procedimiento finito al de máquina con un número finito de partes, tal y como ha hecho el matemático británico Turing. En cuanto a las consecuencias filosóficas de los resultados en consideración, no creo que hayan sido nunca adecuadamente discutidas o ni siquiera observadas.

Los resultados metamatemáticos a que me refiero se centran en torno a un hecho básico, del que podría incluso decirse que son sólo diferentes aspectos, y que podría llamarse la incompletabiüdad o inagotabilidad de la matemática. Nos encontramos con ese hecho en su forma más simple cuando aplicamos el método axiomático, no a algún sistema hipotético-deductivo como la geometría (donde el matemático puede afirmar sólo la verdad condicional de los teoremas), sino a la matemática misma, es decir al cuerpo de aquellas proposiciones matemáticas que valen en un sentido absoluto, sin ninguna hipótesis adicional. Deben existir proposiciones de este tipo, pues de otra forma no podrían existir tampoco teoremas hipotéticos. Por ejemplo, *algunas* implicaciones de la forma: «Si se suponen tales y cuales axiomas, entonces vale tal y cual teorema», deben ser verdaderas en un sentido absoluto.

Asimismo, cualquier teorema de la teoría de números finitaria como 2 + 2 = 4 es sin duda de este tipo. Por supuesto, la tarea de axiomatizar la matemática propiamente dicha difiere de la concepción habitual de la axiomática en la medida en que, como los axiomas no son arbitrarios sino que deben ser proposiciones matemáticas correctas, no podemos huir de la necesidad de asumir algunos axiomas o reglas de inferencia como evidentes sin prueba, dado que las pruebas deben tener algún punto de partida. Sin embargo, existen concepciones ampliamente divergentes sobre la extensión de la matemática misma, tal como la he definido. Los intuicionistas y finitistas, por ejemplo, rechazan algunos de los axiomas y conceptos que otros admiten, tales como la ley del tercio excluso o el concepto general de conjunto.

[NG1] Para las aplicaciones que van a tomarse en consideración en esta conferencia, este concepto equivale al concepto de «función computable de enteros» (es decir; una cuya definición hace efectivamente posible calcular f(n) para todo entero n que se considere). Los procedimientos no operan sobre enteros, sino sobre fórmulas, aunque a causa de [¿] [la enumeración] de las fórmulas en cuestión, pueden siempre reducirse a procedimientos sobre enteros.

El fenómeno de la inagotabilidad de la matemática[NG2], sin embargo, está presente siempre de alguna forma, con independencia del punto de vista que se adopte. Así, podríamos también explicarlo respecto a la concepción más simple y natural, que toma la matemática como es, es decir sin restringirla mediante ninguna crítica. Desde este punto de vista, toda la matemática es reducible a la teoría abstracta de conjuntos, Por ejemplo, el enunciado de que los axiomas de la geometría proyectiva implican cierto teorema significa que si un conjunto *M* de elementos llamados puntos y un conjunto *N* de subconjuntos de *M* llamados líneas rectas satisfacen los axiomas, entonces el teorema vale para *N* y *M.* O bien, por mencionar otro ejemplo, un teorema de la teoría de números puede interpretarse como una afirmación sobre conjuntos finitos. Así, el problema en cuestión es el de la axiomatización de la teoría de conjuntos.

Entonces, cuando se aborda ese problema se ve que el resultado es por completo distinto del que podría haberse esperado. En lugar de terminar con un número finito de axiomas, como en geometría, nos encontramos con una serie infinita de axiomas que puede ampliarse más y más, sin que se vislumbre final alguno y, aparentemente, sin que exista posibilidad de abarcar todos esos axiomas mediante una regla finita que los genere[NG3]. Esto sucede por el hecho de que, si deseamos evitar las paradojas de la teoría de conjuntos sin introducir algo enteramente ajeno a los procedimientos matemáticos reales, entonces el concepto de conjunto debe axiomatizarse por etapas[NG4].

Si, por ejemplo, comenzamos con los enteros, esto es, con los conjuntos finitos de un tipo especial, tenemos primero los conjuntos de enteros y los axiomas sobre ellos (axiomas de primer nivel), después los conjuntos de conjuntos de enteros con sus axiomas (axiomas de segundo nivel), etc., para cualquier iteración finita de la operación «conjunto de»[NG5]. Tenemos entonces el conjunto de todos esos conjuntos de orden finito. Pero podemos en ese momento tratar este conjunto exactamente de la misma forma en que antes tratamos el conjunto de enteros, es decir; podemos "considerar sus subconjuntos (o sea, los conjuntos de orden ω) y formular axiomas sobre su existencia. Este procedimiento puede evidentemente iterarse más allá de ω, *y* de hecho hasta cualquier número ordinal transfinito. Así, podría requerirse como siguiente axioma que la iteración sea posible para *cualquier* ordinal, es decir, para cualquier tipo de orden que pertenezca a algún conjunto bien ordenado.

Pero, ¿hemos llegado ahora al final? De ningún modo, pues tenemos aún una nueva operación para formar conjuntos, esto es, formar un conjunto a

---

[NG2] El término “matemática”, aquí y en lo que sigue, se supone siempre que significa “matemática propiamente dicha” (lo que obviamente incluye la lógica matemática, en tanto se le reconoce correcta desde el punto de vista particular que se toma).

[NG3] En las axiomatizaciones del discurso no matemático, tal como la geometría física, se presupone lo que llamo matemática propiamente dicha; y la axiomatización se refiere al contenido de la disciplina en consideración sólo en la medida en que ésta rebasa la matemática propiamente dicha ... [?] Este contenido, al menos en los ejemplos que hemos encontrado hasta ahora, puede expresarse mediante un número finito de axiomas.

[NG4] En la presentación habitual de los axiomas esta circunstancia no es directamente perceptible, sino que sale a relucir por sí misma al emprender un examen más detallado de los significados de los axiomas.

[NG5] La operación «conjunto de» es sustancialmente la misma que la operación «conjunto potencia», donde el conjunto potencia de *M* es por definición el conjunto de todos los subconjuntos de *M*.

partir de algún conjunto inicial *A* y de algún conjunto bien ordenado *B* aplicando la operación «conjunto de» a *A* tantas veces como el conjunto bien ordenado *B* indique[NG6]. Y tomando *B* como algún buen orden de *A*, podemos entonces iterar esta nueva operación una y otra vez hasta lo transfinito. Esto producirá una nueva operación, la cual podemos tratar de la misma manera, etc. Así, el siguiente paso será requerir que *cualquier* operación que genere conjuntos a partir de otros conjuntos pueda iterarse hasta cualquier número ordinal (o sea, hasta cualquier tipo de orden de un conjunto bien ordenado). Pero, ¿hemos llegado ahora al final? No, porque podemos requerir; no sólo que el procedimiento descrito se lleve a cabo respecto a cualquier operación, sino que exista además un conjunto cerrado con respecto a ella, es decir; uno que posea la propiedad de que, si el procedimiento (respecto a cualquier operación) se aplica a elementos de este conjunto, produzca de nuevo elementos de este conjunto,

Se observará, creo yo, que no hemos llegado al final todavía, y que no puede haber ni siquiera un final para *este* procedimiento de formar los axiomas, porque la misma formulación de los axiomas hasta cierto estadio da lugar al siguiente axioma. Es cierto que en la matemática de nuestros días los niveles más altos de esta jerarquía prácticamente nunca se utilizan; puede decirse con seguridad que el 99,9% de la matemática actual está contenido en los primeros tres niveles de tal jerarquía. Así, respecto a todos los fines prácticos, la totalidad de la matemática puede reducirse a un número finito de axiomas. Sin embargo, esto constituye un mero accidente histórico, que carece de importancia para las cuestiones de principio. Además, no es del todo improbable que este rasgo de la matemática actual tenga algo que ver con otro de sus rasgos: su incapacidad para probar ciertos teoremas fundamentales, como por ejemplo la hipótesis de Riemann, a pesar de muchos años de esfuerzo. Pues puede mostrarse que la pertinencia de los axiomas para los conjuntos de los niveles más altos no se restringe en modo alguno a esos conjuntos, sino que por el contrario tienen consecuencias incluso para el nivel 0, es decir; la teoría de los enteros.

Para ser más exactos, cada uno de esos axiomas conjuntistas entraña la solución de ciertos problemas diofánticos que han permanecido indecidibles sobre la base de los axiomas precedentes[NG7]. *Los problemas diofánticos en cuestión son del siguiente tipo: sea P* ($x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m$) *un polinomio con coeficientes enteros dados y n + m variables* $x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m$, *y considérense las variables* x_i *como incógnitas y las variables* y_i *como parámetros; el problemas entonces es: ¿Tiene la ecuación P = 0 soluciones enteras para cualesquiera valores enteros de los parámetros, o existen valores enteros de*

[NG6] A fin de llevar a cabo la iteración puede establecerse que A = B y suponerse que se ha asignado un buen orden determinado a cada conjunto. Para ordinales de la segunda clase [[ordinales límite]] siempre tiene que formarse el conjunto de los conjuntos obtenidos previamente.

[NG7] Para que este teorema valga, si se asume también el punto de vista intuicionista o finitista, se requiere como hipótesis la consistencia de los axiomas de la teoría de conjuntos, que es desde luego auto-evidente (y por tanto puede eliminarse como hipótesis) si se considera que la teoría de conjuntos es matemática propiamente dicha. Sin embargo, para la matemática finitaria vale un teorema similar sin ninguna hipótesis de consistencia cuestionable; a saber, la introducción de funciones recursivas de orden cada vez mayor conduce a la solución de más y más problemas de la clase especificada en teoría de números. En matemática intuicionista se cumple, sin lugar a dudas, un teorema similar para la introducción (mediante nuevos axiomas) de ordinales cada vez mayores de la segunda clase de números.

los parámetros para los que esta ecuación no tiene soluciones enteras? A cada uno de los axiomas conjuntistas puede asignársele cierto polinomio P para el que el problema recién formulado se *convierte en decidible gracias al axioma. Puede siempre lograrse incluso que el grado de P no sea mayor de 4.*

La matemática actual no ha aprendido todavía a hacer uso de los axiomas conjuntistas para solucionar problemas de teoría de números, excepto con respecto a los axiomas del primer nivel, que son utilizados en la teoría analítica de números. Pero para dominar la teoría de números esto es manifiestamente insuficiente. Algún tipo de teoría de números conjuntista, aún por descubrirse, llegaría ciertamente mucho más lejos.

He tratado hasta ahora de explicar el hecho que llamo incompletabilidad de la matemática con respecto a una aproximación concreta a la fundamentación de la matemática, esto es, la axiomática de la teoría de conjuntos. Sin embargo, el que este hecho sea enteramente independiente de la aproximación o concepción escogidas resulta de ciertos teoremas muy generales. El primero de ellos establece simplemente que, *si escogemos cualquier sistema bien definido de axiomas y reglas de inferencia, siempre existen problemas diofánticos del tipo descrito*[NG8] *que son indecidibles respecto a esos axiomas, con la única condición de que ninguna proposición falsa de este tipo sea derivable.*

Si hablo aquí de un sistema bien definido de axiomas y reglas, quiero decir solamente que debe ser efectivamente posible escribir los axiomas en algún formalismo preciso, o, si su número es infinito, debe ofrecerse un procedimiento finito para escribirlos uno tras otro. Asimismo las reglas de inferencia deben ser tales que, dadas cualesquiera premisas, o bien puedan escribirse las conclusiones alcanzadas por cada una de las reglas, o bien pueda determinarse que no existe ninguna conclusión inmediata por la regla de inferencia en consideración. Este requisito para las reglas y los axiomas equivale a la exigencia de que sea posible construir una máquina finita, en el sentido preciso de una «máquina de Turing», que escriba todas las consecuencias de los axiomas una tras otra. Por esta razón el teorema en consideración equivale al hecho de que no existe ningún procedimiento finito de decisión sistemática de todos los problemas diofánticos del tipo especificado.

El segundo teorema tiene relación con el concepto de ausencia de contradicción. Para un sistema bien definido de axiomas y reglas la cuestión de su consistencia es por supuesto una cuestión matemática bien definida en sí misma. Además, como los símbolos y las proposiciones de un formalismo son siempre a lo sumo numerables, todos pueden *ponerse* en correspondencia con los enteros, y es plausible, y de hecho demostrable, que la cuestión de la consistencia pueda transformarse siempre en una cuestión de teoría de números (para ser más precisos, en una cuestión del tipo descrito más arriba). Ahora bien, el teorema dice que *para cualquier sistema bien definido de axiomas y reglas la proposición que establece su consistencia*[NG9] *(o más bien la*

[NG8] Esta última hipótesis puede reemplazarse por la consistencia (como ha mostrado Rosser en [«Extensions of some theorems of Gödel and Church»,*Jrn. Symb. Logic* I, pp. 87-91]), pero entonces las proposiciones indecidibles poseen una estructura ligeramente más complicada. Además, debe añadirse la hipótesis de que los axiomas implican las propiedades [?] primitivas de la adición, la multiplicación, y <.

[NG9] Esta es una de las proposiciones que son indecidibles con tal de que no sea derivable ningún teorema numérico falso (cf. el teorema precedente).

proposición de teoría de números equivalente) es *indemostrable a partir de esos axiomas y reglas, con tal de que tales axiomas y reglas sean consistentes y basten para derivar cierto fragmento*[NG10] *de la aritmética finitaria de los enteros.*

Es *este* teorema el que hace particularmente evidente la incompletabilidad de la matemática. Pues *hace imposible que alguien pueda establecer cierto sistema bien definido de axiomas y reglas y, al mismo tiempo, pueda, de forma consistente, hacer la siguiente afirmación sobre él: percibo (con certeza matemática) que todos estos axiomas y reglas son correctos*[NG11] *y además creo que contienen toda la matemática.* Si alguien afirma lo anterior se contradice a sí mismo, pues si percibe como correctos los axiomas en consideración, también percibirá (con la misma certeza) que son consistentes, con lo que debe poseer una intuición matemática no derivable de sus axiomas. Sin embargo, hemos de ir con mucho cuidado a la hora de comprender claramente la significación de este estado de cosas. ¿Significa esto que ningún sistema bien definido de axiomas correctos puede contener toda la matemática propiamente dicha? Sí, si por matemática propiamente dicha se entiende el sistema de todas las proposiciones matemáticas verdaderas; pero no, si por ello se entiende el sistema de todas las proposiciones matemáticas demostrables.

Distinguiré esos dos significados de la matemática como matemática en sentido objetivo y en sentido subjetivo. Evidentemente ningún sistema bien definido de axiomas correctos puede abarcar toda la matemática objetiva, puesto que la proposición que establece la consistencia del sistema es verdadera, pero no demostrable en él. Sin embargo, no se excluye la existencia de una regla finita que genere todos los axiomas evidentes de la matemática subjetiva. No obstante, si tal regla existe, nuestro entendimiento humano ciertamente nunca podría conocerla como tal, es decir, nunca podríamos saber con certeza matemática que todas las proposiciones que genera son correctas[NG12]; o, en otras palabras, podríamos percibir como verdaderas sólo una proposición tras otra, para cualquier número finito de ellas. Sin embargo, la afirmación de que son todas verdaderas podría como mucho conocerse con certeza empírica, sobre la base de un número suficiente de casos particulares o mediante otras inferencias inductivas[NG13].

Si ello fuera así, significaría que la mente humana (en el dominio de la

---

[NG10] Esto es, los axiomas de Peano más la regla usual de definición por inducción, con [?] una lógica que satisfaga los requisitos finitistas más estrictos.

[NG11] Si se dice sólo «creo que podré percibirlos como verdaderos uno tras otro» (donde se supone que su número es infinito), entonces no se entra en contradicción (véase más abajo).

[NG12] Pues esto (o la consecuencia sobre la consistencia de los axiomas) constituiría una intuición matemática no derivable de los axiomas y reglas en consideración, lo cual es contrario a la suposición. [*NT: La versión en español dice: "... no derivable de la regla en consideración para los axiomas"; esta traducción no se ajusta con precisión al sentido del original que dice "... not derivable from de axioms [¿?] rules under consideration ..."*].

[NG13] Por ejemplo, es concebible (aunque más allá de los límites de la ciencia actual) que la fisiología del cerebro avanzara tanto que pudiese saberse, con certeza empírica, que: 1. el cerebro basta para la explicación de todos los fenómenos mentales y es una máquina en el sentido de Turing, y 2. tal y cual es la precisa estructura anatómica y el funcionamiento fisiológico de la parte del cerebro que lleva a cabo el pensamiento matemático. Más aún, en el caso de que se adopte el punto de vista finitista (o intuicionista), tal inferencia inductiva podría basarse en la creencia (más o menos empírica) de que la matemática no finitaria (o no intuicionista) es consistente. *[NT: La versión en español dice "estructura matemática" en lugar de "estructura anatómica"; pero la inglesa escribe "anatomical structure"]*.

matemática pura) *equivale* a una máquina finita que, no obstante, es incapaz de conocer completamente[NG14] su propio funcionamiento. Tal incapacidad para comprenderse a sí misma aparecería entonces erróneamente a sus ojos como su falta de límites o inagotabilidad. Pero observen por favor que, si ello fuera así, esa falta de límites no podría en modo alguno menguar la incompletabilidad de la matemática objetiva. Por el contrario, la haría particularmente notoria. Pues si la mente humana fuera equivalente a una máquina finita, entonces la matemática objetiva no sólo sería incompletable en el sentido de no estar contenida en ningún sistema axiomático bien definido, sino que además existirían problemas diofánticos *absolutamente* irresolubles del tipo descrito más arriba, donde el epíteto «absolutamente» significa que tales problemas no sólo no serían decidibles en algún sistema axiomático particular sino por *ninguna* prueba matemática que la mente humana pueda concebir

Así, la siguiente conclusión disyuntiva es inevitable: o *la matemática es incompletable en el sentido de que una regla finita no puede nunca abarcar sus axiomas evidentes, es decir, que la mente humana (incluso en el reino de la matemática pura) sobrepasa infinitamente la potencia de cualquier máquina finita, o bien existen problemas diofánticos absolutamente irresolubles del tipo especificado* (donde no se excluye el caso de que ambos términos de la disyunción sean verdaderos, con lo que hay, estrictamente hablando, tres alternativas).

Es éste un hecho matemático establecido que me parece de gran interés filosófico. En este sentido, es desde luego de gran importancia que al menos este hecho sea enteramente independiente del punto de vista que se adopte respecto a los fundamentos de la matemática[NG15]. Sin embargo, existe una restricción a esa independencia: la concepción adoptada debe ser lo suficientemente liberal como para admitir que las proposiciones sobre todos los enteros son plenamente significativas. Si alguien fuera un finitista tan estricto como para mantener que sólo las proposiciones particulares del tipo de 2 + 2 = 4 pertenecen a la matemática propiamente dicha,[NG16] entonces el teorema de

---

[NG14] Desde luego, el funcionamiento físico del mecanismo del pensamiento podría muy bien ser completamente inteligible. La intuición de que este mecanismo particular debe conducir siempre a resultados correctos (o sólo consistentes) sobrepasaría los poderes de la razón humana.

[NG15] Para los intuicionistas y finitistas el teorema vale como una implicación (en lugar de una disyunción). Debe observarse que los intuicionistas han afirmado siempre el primer término de la disyunción y negado el segundo, en el sentido de que no puede existir ninguna proposición indecidible demostrable (véase más arriba, p. [?] *[NT: Los editores del texto en español y en inglés señalan explícitamente que no pudieron ubicar esta referencia]*). Pero esto no tiene significado para el asunto de cuál alternativa se aplica a la matemática intuicionista si los términos de la disyunción se entienden en el sentido objetivo (rechazados como carentes de sentido por los intuicionistas). En cuanto al finitismo, parece muy probable que el primer término de la disyunción sea falso.

[NG16] Si se toma el "punto de vista implicacionista" de K. Menger, (cf. [*Blätter f. d Phil,* 4 (1930), p. 323]) en el sentido más estricto, ello conduciría a tal actitud, pues según él las únicas proposiciones matemáticas con sentido (esto es, las únicas que, en mi terminología, pertenecen a la matemática propiamente dicha) serían aquellas que afirman que tal y cual conclusión puede extraerse de tales y cuales axiomas y reglas de inferencia de tal y cual forma, Sin embargo, ésta es una proposición de exactamente el mismo carácter lógico que 2 + 2 = 4. Algunas de las consecuencias no deseadas de este punto de vista son las siguientes. Una proposición negativa, según la cual la conclusión *B* no puede extraerse de los axiomas y la regla *A*, no pertenecería a la matemática propiamente dicha. De aquí que no pudiera saberse nada acerca de ella excepto que se sigue de ciertos otros axiomas y reglas. Sin embargo, una prueba de que de hecho se sigue (ya que esos otros axiomas y reglas son de nuevo arbitrarios)

incompletabilidad no le sería aplicable. Pero no creo que tal actitud pudiera mantenerse de forma consistente, pues juzgamos que 2 + 2 = 4 y que *a* + *b* = *b* + *a*, para dos enteros *a* y *b* cualesquiera, exactamente por el mismo tipo de razones. Además, este punto de vista, para ser consistente, tendría que excluir también los *conceptos* que se refieren a *todos* los enteros, tales como «+» (o a todas las fórmulas tales como «prueba correcta por tales y cuales reglas»), y reemplazarlos por otros que fueran aplicables sólo en algún dominio finito de enteros (o fórmulas). Debe observarse, sin embargo, que aunque la verdad del teorema disyuntivo sea independiente del punto de vista adoptado, la cuestión de qué alternativa sea la válida no tiene por qué ser independiente de él.

Creo que he explicado suficientemente el aspecto matemático de la situación y puedo ahora dedicarme a las implicaciones filosóficas. Sin embargo, y como consecuencia del estado poco desarrollado de la filosofía en nuestros días, no debe desde luego esperarse que las siguientes inferencias se realicen con rigor matemático.

En correspondencia con la forma disyuntiva del teorema principal sobre la incompletabilidad de la matemática, las implicaciones filosóficas serán *prima facie* también disyuntivas, aunque en todo caso se oponen decididamente a la filosofía materialista. Así, si vale la primera alternativa, esto parece implicar que el funcionamiento de la mente humana no puede reducirse al del cerebro, que es, bajo toda apariencia, una máquina finita con un número finito de partes, esto es, las neuronas y sus conexiones. De esta forma, uno llega aparentemente a adoptar algún punto de vista vitalista.

Por otro lado, la segunda alternativa, en la que existen proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles, parece refutar la concepción de que la matemática (en cualquier sentido) es sólo nuestra propia creación. Pues el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas, ya que ellas no pueden tener más propiedades que aquellas que él les ha dado. Así, esta alternativa parece implicar que los objetos y hechos matemáticos, o al menos *algo* en ellos, existen objetiva e independientemente de nuestros actos mentales y decisiones, es decir, supone alguna forma de platonismo o «realismo» respecto a los objetos matemáticos[NG17]. Pues la interpretación empírica de la matemática[NG18], esto es, la concepción de que los hechos matemáticos

---

de ningún modo excluiría la posibilidad de que (a pesar de la prueba formal en contra) algún día pudiera lograrse derivar *B* de *A*. Por la misma razón, tampoco la prueba inductiva habitual de *a* + *b* = *b* + *a* excluiría la posibilidad de que se descubrieran dos enteros que no satisficieran esta ecuación.

[NG17] No existe ningún término lo suficientemente general como para expresar exactamente la conclusión extraída aquí, que dice sólo que los objetos y teoremas de la matemática son tan objetivos e independientes de nuestra libre elección y de nuestros actos creativos como lo es el mundo físico. Sin embargo, esta conclusión no determina en modo alguno lo que sean tales entidades objetivas, es decir si se localizan en la naturaleza, en la mente humana, o en ninguna de las dos. Estas tres concepciones sobre la naturaleza de la matemática corresponden exactamente a las tres concepciones sobre la naturaleza de los conceptos que [?] tradicionalmente llevan los nombres de psicologismo, conceptualismo aristotélico y platonismo.

[NG18] Es decir, la concepción de que los objetos matemáticos y la forma en que los conocemos no difieren esencialmente de los objetos físicos o psíquicos y las leyes de la naturaleza. Por contra, la verdad es que, si la objetividad de la matemática se supone, se sigue inmediatamente que sus objetos deben ser totalmente distintos de los objetos sensibles, porque 1. Las proposiciones matemáticas, si se analizan adecuadamente, nada dicen respecto a las entidades del mundo espacio-temporal. Esto es particularmente claro en proposiciones aplicadas como: O bien llovió ayer o bien no llovió. Esta observación no excluye la existencia de conocimientos puramente conceptuales (más allá de la matemática) que satisfagan estos

constituyen un tipo especial de hechos físicos o psicológicos, es demasiado absurda para ser mantenida (véase más abajo).

[[IEE: Por supuesto he simplificado las cosas en estas breves formulaciones. Existen en ambos casos ciertas objeciones, aunque, en mi opinión, no resisten un examen minucioso. En el caso de la primera alternativa podría objetarse que el hecho de que la mente humana sea más efectiva que cualquier máquina finita no implica necesariamente que exista alguna entidad no material, como una entelequia, fuera de los cerebros, sino sólo que las leyes que gobiernan el comportamiento de la materia viva son mucho más complicadas de lo que se había esperado, y en concreto no nos permiten deducir el comportamiento del todo del de las partes aisladas[NI1]. (Esta concepción parece, incidentalmente, recibir también apoyo de la mecánica cuántica, donde el estado de un sistema complejo no puede en general describirse como compuesto de los estados de los sistemas parciales.) Existe de hecho una escuela de psicólogos que defiende esta concepción: los llamados holistas. Sin embargo, me parece claro que también esta teoría deja de hecho de lado el materialismo, pues adscribe a la materia desde el principio todas las misteriosas propiedades de la mente y la vida, mientras que originalmente la esencia misma del materialismo consistía en explicar esas propiedades a partir de la estructura del organismo y las leyes relativamente simples de la interacción entre las partes.]]

No se sabe si la primera alternativa es válida, pero de cualquier modo está bastante de acuerdo con las opiniones de algunos de los investigadores más destacados en fisiología nerviosa y cerebral, que niegan decididamente la posibilidad de una explicación puramente mecanicista de los procesos psíquicos y neuronales. En cuanto a la segunda alternativa, podría objetarse que el constructor no necesariamente conoce *todos* las propiedades de lo que construye. Por ejemplo, construimos máquinas y sin embargo no podemos predecir sus comportamientos con todo detalle. Pero se trata de una objeción muy pobre. Pues no creamos máquinas de la nada, sino que las construimos de algún material dado. Si la situación fuera similar en la matemática, entonces ese material o base de nuestras construcciones sería algo objetivo, lo que por tanto exigiría la adopción de alguna concepción realista, incluso si algunos otros ingredientes de la matemática fueran de nuestra propia creación. Lo mismo ocurriría si en nuestras creaciones *utilizáramos* algún instrumento que radicara en nosotros pero que fuera distinto de nuestro yo (tal como la «razón», interpretada como algo semejante a una máquina pensante). Pues los hechos matemáticos expresarían entonces (por lo menos en parte) propiedades de ese instrumento, el cual gozaría entonces de existencia objetiva.

En tercer lugar, podría objetarse que el significado de una proposición

---

requerimientos. 2. Los objetos matemáticos son conocidos con precisión y se pueden reconocer reglas generales con certeza, esto es, mediante inferencia deductiva, no mediante inferencia inductiva. 3. Pueden conocerse (en principio) sin usar los sentidos (esto es, por medio de la sola razón), pues ellos no tienen nada que ver con las entidades actuales sobre las que los sentidos (incluido el sentido interior) nos informan, sino con posibilidades e imposibilidades). *[NT: Esta nota se ha tomado casi totalmente de la edición en inglés, ya que difiere de manera considerable de la incluida en la edición en español]*.

[NI1] [[La otra posibilidad, esto es, atribuir «razón» ya al comportamiento de las partes elementales (es decir, las neuronas o ... [?]) parece completamente improbable (tanto en sí mismo como en vista del éxito de la física al explicar el comportamiento de todos no estructurados en términos de leyes «computables»).]]

sobre todos los enteros puede sólo consistir en la existencia de una prueba general, ya que es imposible verificarla para todos los enteros uno por uno. Por tanto, en el caso de una proposición indecidible sobre todos los enteros, ni ella misma ni su negación son verdaderas, de aquí que ninguna exprese una propiedad objetivamente existente de los enteros, aunque desconocida. No estoy ahora en situación de discutir el problema epistemológico de si esta opinión es a fin de cuentas consistente. Da ciertamente la impresión de que uno debe *primero* entender el significado de una proposición *antes* de poder entender una prueba de ella, de modo que el significado de «todos» no puede definirse en términos del significado de «prueba». Pero con independencia de tales investigaciones epistemológicas deseo señalar que uno puede conjeturar la verdad de una proposición universal [?] (por ejemplo, que podré verificar cierta propiedad para *cualquier* entero dado) y, al mismo tiempo, conjeturar que no existe ninguna prueba general de este hecho. Es fácil imaginar situaciones en las que ambas conjeturas estén muy bien fundadas. Para la primera mitad esto sería el caso si la proposición en cuestión fuera alguna ecuación *F(n)* = *G(n)* de dos funciones de la teoría de números que pudiera verificarse hasta números n muy grandes[NG19].

Además, exactamente como en las ciencias naturales, esta *inductio per enumerationem simplicem* no es en modo alguno el único método inductivo concebible en matemática. Admito que todo matemático siente un horror innato a conceder más que una importancia heurística a tales argumentos inductivos, Sin embargo, creo que ello se debe al prejuicio mismo de que los objetos matemáticos de alguna forma carecen de existencia real. Si la matemática describe un mundo justamente tan objetivo como el de la física, no hay razón para que los métodos inductivos no se apliquen en la matemática tal como se hace en la física. El hecho es que en la matemática tenemos todavía hoy la misma actitud que en tiempos pasados se tenía hacia todas las ciencias, esto es, tratamos de derivarlo todo de las definiciones (es decir; de la esencia de las cosas, por usar términos ortológicos) mediante pruebas convincentes. Quizá este método sea tan erróneo en matemática como lo fue en física, si reclama el monopolio. Es cierto que sólo la segunda alternativa apunta en esa dirección. Este argumento global muestra, de paso, que las implicaciones filosóficas de los hechos matemáticos explicados no están enteramente del lado de la filosofía racionalista o idealista, sino que en un aspecto favorecen la concepción empirista[NG20].

Sin embargo, *y* este es *el punto que me gustaría discutir ahora,* me parece que las conclusiones filosóficas extraídas de la segunda alternativa, en particular en lo tocante al realismo (platonismo), reciben apoyo de los desarrollos modernos en fundamentación de la matemática, también con

---

[NG19] Tal verificación de una *igualdad* (no de una desigualdad) entre dos funciones de la teoría de números, de estructura no demasiado complicada, daría a la igualdad completa una gran probabilidad, aunque su valor numérico no pueda estimarse en el estado presente de la ciencia. Sin embargo, es fácil dar ejemplos de proposiciones generales sobre enteros donde la probabilidad puede estimarse incluso ahora. Por ejemplo, la probabilidad de la proposición que afirma que para todo n existe al menos un dígito distinto de cero entre el enésimo y el cuadrado del enésimo dígito de la expresión decimal de π, converge hacia 1 a medida que se verifica para un *n* más y más grande. Una situación similar tiene lugar también [?] para los teoremas de Goldbach y Fermat.

[NG20] Para ser más precisos, ello sugiere que la situación en la matemática no es muy distinta de la existente en las ciencias naturales. Muy diferente sería la cuestión de si en última instancia lo correcto es el apriorismo o el empirismo.

independencia de qué alternativa sea la válida. Me parece que el principal argumento que apunta en esa dirección es el siguiente. Primero de todo, si la matemática fuera nuestra libre creación, es cierto que todavía podría darse la ignorancia respecto a los objetos creados, pero sólo por falta de una clara conciencia de lo realmente creado (o quizá debido a la dificultad práctica de cálculos demasiado complicados). Por tanto, tendría que desaparecer (al menos en principio, aunque quizá no en la práctica[NG21]) tan pronto como alcanzásemos una perfecta claridad. Sin embargo, los desarrollos modernos en fundamentación de la matemática han logrado un insuperable grado de exactitud, aunque ello no ha servido de ninguna ayuda a la solución de los problemas matemáticos.

Argumentos a favor

Segundo, la actividad del matemático muestra muy poco de la libertad que un creador debería disfrutar. Incluso si, por ejemplo, los axiomas sobre los enteros fueran de libre invención, todavía debería admitirse que el matemático, una vez imaginadas las primeras propiedades de sus objetos, ha llegado al final de su poder creativo, y no está en situación de crear a su voluntad también la validez de los teoremas. Si algo como la creación existe a fin de cuentas en la matemática, entonces lo que hace cada teorema es precisamente restringir la libertad de creación; pero aquello que la restringe debe evidentemente existir con independencia de la creación[NG22].

Tercero, si los objetos matemáticos son creación nuestra, entonces los enteros y los conjuntos de enteros tendrán evidentemente que ser dos creaciones distintas, la primera de las cuales no necesita de la segunda. Sin embargo, a fin de probar ciertas proposiciones sobre los enteros se necesita el concepto de conjunto. Así que, con objeto de hallar las propiedades que *nosotros* hemos dado a ciertos objetos producto de la imaginación pura, debemos primero crear ciertos objetos adicionales, lo cual constituye desde luego una situación muy extraña.

Lo que he dicho hasta ahora ha sido formulado en términos del más bien vago concepto de «libre creación» o «libre invención». Existen intentos de otorgar significados más precisos a este término. Sin embargo esto tiene sólo como consecuencia que también la refutación del punto de vista en cuestión se hace más precisa y convincente. Me gustaría mostrar esto en detalle para la más precisa, y al mismo tiempo más radical, formulación que se ha dado hasta ahora. Se trata de la que afirma que las proposiciones matemáticas son verdaderas solamente en virtud de ciertas reglas arbitrarias sobre el uso de símbolos.

[Nota de Gödel: «Omitir desde aquí hasta la p. 29» (del manuscrito

---

[NG21] Esto es, todo problema debería ser reducible a algún cálculo finito.

[NG22] No sirve de nada decir que estas restricciones se producen por la exigencia de consistencia, que en sí misma es una libre elección nuestra, porque podría escogerse el producir la consistencia *y además* ciertos teoremas. Ni tampoco sirve decir que los teoremas se limitan a repetir (totalmente o en parte) las propiedades primeramente inventadas, porque entonces la conciencia exacta de lo que se supuso al principio tendría que bastar para decidir cualquier cuestión de la teoría que resulta refutada mediante los argumentos primero y tercero. Sobre la cuestión de si proposiciones indecidibles pueden decidirse arbitrariamente por un nuevo acto de creación, véase la nota [?]. [NEI: Ninguna nota del manuscrito se ocupa de este asunto. Sin embargo una anotación abreviada en la pg. 29' (*del manuscrito original*) contiene la frase "creación continua". Este podría ser un recordatorio de Gödel a sí mismo para escribir algo acerca del asunto].

original)][NEI]

[[Se trata de la que interpreta las proposiciones matemáticas como expresando solamente ciertos aspectos de convenciones sintácticas (o lingüísticas)[NG23], esto es, tales proposiciones simplemente repetirían parte de esas convenciones. Según esta concepción, las proposiciones matemáticas debidamente analizadas deben mostrarse como carentes de contenido, como por ejemplo el enunciado «todos los garañones son asnos».

[[Todos estarán de acuerdo en que esta proposición no expresa ningún hecho zoológico, ni ningún otro hecho objetivo, sino que su verdad depende solamente de la circunstancia de que hemos usado el término «garañón» como abreviatura de «asno macho», ya que las reglas más simples acerca del uso de símbolos son las definiciones. Pero el tipo más corriente de convenciones simbólicas es, con mucho, el de las definiciones (sean explícitas o contextuales, donde las últimas deben sin embargo ser tales que hagan posible la eliminación del término definido en cualquier contexto en que aparezcan). Por tanto, la versión más simple de la concepción en cuestión consistiría en la afirmación de que las proposiciones matemáticas son verdaderas solamente en virtud de las definiciones de los términos que aparecen en ellas. Lo que significa que sustituyendo sucesivamente todos los términos por sus definiciones, cualquier teorema puede reducirse a la forma *a* = *a* (obsérvese que *a* = *a* debe admitirse como verdadero si se admiten definiciones, pues podemos definir *b* mediante *b* = *a,* y entonces, gracias a esta definición, reemplazar *b* por *a* en esta igualdad).

[[[...cualquier teorema puede reducirse a] una tautología explícita, tal como *a* = *a, o p* $\rightarrow$p, o *pq* $\rightarrow$p, o algo parecido (no importa, en este sentido, lo

[NEI] Puesto que el material no fue tachado, es una conjetura plausible suponer que debía omitirse de la presentación oral. También son posibles otras conjeturas, por ejemplo que tiempo después Gödel pensó que había duplicación o quizá mejoras en el borrador del artículo no publicado de 1953 acerca de Carnap].

[NG23] Esto es, tales convenciones no deben referirse a ningún objeto extralingüístico (como hace una definición demostrativa), sino establecer reglas acerca del significado o verdad [?] de las expresiones simbólicas sobre la sola base de su estructura externa. Además, estas reglas deben desde luego ser tales que no impliquen la verdad o falsedad de ninguna proposición fáctica (ya que en tal caso no podría decirse que están vacías de contenido ni que son sintácticas). Debe observarse que si el término «regla sintáctica» se entiende de esta forma general, entonces la concepción considerada incluye la fundamentación formalista como una elaboración especial de ella. Puesto que según la última la matemática se basa sólo en ciertas reglas sintácticas de la forma: «las proposiciones de tal y cual estructura son verdaderas» (los axiomas), y «si las proposiciones de estructura ... son verdaderas, entonces tales y cuales proposiciones son también verdaderas». Además, la prueba de consistencia, como puede verse fácilmente, tiene como consecuencia que estas reglas carezcan de contenido en la medida en que no impliquen proposiciones fácticas. Por otro lado, también se verá más abajo que, a la inversa, la viabilidad del programa nominalista implica la viabilidad del programa formalista. Puede dudarse si esta concepción (nominalista) podría incluirse en la concepción que considera la matemática como una libre creación de la mente, porque aquélla niega la existencia de objetos matemáticos. Sin embargo, la relación entre ambas es muy estrecha, ya que bajo la otra concepción la así llamada existencia de los objetos matemáticos consiste solamente en su propiedad de ser construidos, y los nominalistas no negarían que de hecho imaginamos objetos (no existentes) tras los símbolos matemáticos, y que esas ideas subjetivas suministran incluso los principios que sirven de guía en la elección de las reglas sintácticas. (Para una exposición muy lúcida de los aspectos filosóficos de esta concepción nominalista, véase H. Hahn, *Act Sci.* et *ind* 226 (1935), o R. Carnap, *Act. Sci*. 291 (1935), *Erk.* 5 (1935), p. 30). [*NT: Esta nota , en la edición en inglés, se coloca como la Nota 23 después de las palabras "Se trata de la que[23] .." antes del texto interpolado*].

que se considere como tautología explícita, excepto el que, a fin de justificar el término «explícita», debe ser posible, e incluso fácil, hallar, para una proposición dada, si es o no una tautología *explícita)*.

[[Pero entonces se sigue directamente de los teoremas mencionados anteriormente que tal reducción a tautologías explícitas es imposible. Pues ello inmediatamente supondría un procedimiento mecánico para decidir sobre la verdad o falsedad de toda proposición matemática. Sin embargo, tal procedimiento no puede existir; ni siquiera para la teoría de números. Es cierto que la refutación se refiere sólo a la versión más simple de este punto de vista (nominalista); pera las versiones más refinadas no sobreviven tampoco a ella. El enunciado más débil que debería al menos ser demostrable, a fin de que la concepción sobre el carácter tautológico de la matemática fuera sostenible, es el siguiente: toda proposición matemática demostrable puede deducirse de las solas reglas semánticas sobre la verdad y falsedad de los enunciados (es decir; sin usar o saber nada más salvo esas reglas)[NG24], mientras que las negaciones de proposiciones matemáticas demostrables no pueden derivarse de ese modo (cf. nota NG23). (En lenguajes formulados de forma precisa tales reglas —esto es, reglas que estipulen las condiciones bajo las que un enunciado determinado es verdadero— aparecen como medio de determinar el significado de los enunciados. Además, en todos los lenguajes conocidos *hay* proposiciones que parecen ser verdaderas en virtud sólo de esas reglas.) Por ejemplo, la disyunción y la negación se introducen mediante las reglas siguientes: 1. $p \vee q$ es verdadero si al menos uno de sus términos lo es, y 2. $\neg p$ es verdadero si p no lo es. Se sigue entonces claramente de esas reglas que $p \vee \neg p$ es siempre verdadero para cualquier p. (Las proposiciones que pueden derivarse así se llaman tautologías.)

[[Es de hecho cierto que, en los simbolismos de la lógica matemática cuyas reglas han sido convenientemente escogidas, la verdad de los axiomas matemáticos *es* derivable de esas reglas[NG25]; sin embargo (y este es el gran obstáculo), en esta derivación los conceptos y axiomas matemáticos y lógicos mismos deben aplicarse de una forma especial, esto es, como referidos a símbolos, combinaciones de símbolos, conjuntos de símbolos, etc. De aquí que si esta teoría desea probar el carácter tautológico de los axiomas matemáticos, debe suponer primero su verdad. Así, mientras que la idea original de esta concepción era hacer comprensible la verdad de los axiomas matemáticos

---

[NG24] Respecto al requisito de consistencia, véase la nota [¿NG23?] [[NEI: Es posible que Gödel intentase escribir una nueva nota sobre este asunto. En el manuscrito, el texto dado está encima de un texto tachado en el cual se dice algo sobre el "requisito de consistencia", texto que quizá él pensó que repetía puntos de la nota NG23]]. [[IEE. De otro modo la solución sería por supuesto trivial. El requisito de consistencia se sigue también directamente del concepto de regla sintáctica (como se explica en la nota [?]), puesto que un sistema inconsistente de reglas sintácticas implicaría la verdad de toda proposición fáctica, mientras que la carencia de contenido significa que ninguna proposición fáctica se seguiría, y de aquí el conflicto con los criterios de verdad que se derivan de definiciones ... [?].]]

[NG25] *Cf.* Ramsey, F,R, *Proc. Lond. Math. Soc.* II, ser 25 (1926), pp. 368 y 382, y Carnap, R, *Log. Synt. of Lang.,* 1937, pp, 39, I 10 y 182. Merece la pena mencionar que Ramsey logra incluso reducirlos a tautologías explícitas de la forma $a = a$ mediante definiciones explícitas, pero a expensas de admitir proposiciones de longitud infinita (e incluso transfinita), lo cual entraña desde luego la necesidad de presuponer la teoría de conjuntos transfinita, a fin de poder tratar con esas entidades infinitas. Carnap se limita a proposiciones de longitud finita, pero en su lugar se ve obligado a considerar conjuntos infinitos, conjuntos de conjuntos, etc., de es as proposiciones finitas.

mostrando que son tautologías, termina sin embargo en lo opuesto, es decir, la verdad de los axiomas debe *primero* suponerse y sólo *después* puede mostrarse que son tautologías en un lenguaje convenientemente escogido. [[IEE. Que esto pueda hacerse no es desde luego sorprendente: puede hacerse para cualesquiera axiomas[NI2].]] Además, un enunciado similar vale para los conceptos matemáticos, es decir: en lugar de ser capaces de definir sus significados mediante convenciones sintácticas, debemos primero conocerlos a fin de comprender las convenciones sintácticas en cuestión, o la prueba de que ellas implican los axiomas matemáticos, pero no sus negaciones.

[[Es entonces claro que la elaboración de la concepción nominalista no satisface el requisito establecido en la página [?] porque lo que se utiliza en las derivaciones no son sólo las reglas, sino además toda la matemática. Sin embargo, esta elaboración del nominalismo produciría una refutación completa del mismo (debo confesar que no puedo imaginar ninguna *refutación* mejor de esta concepción que esta prueba de ella), con tal de que pueda añadirse una cosa: que el resultado descrito es inevitable (es decir, independiente del lenguaje simbólico particular y la interpretación de la matemática escogidos).

[[Esto exactamente no puede probarse, pero sí algo tan parecido que basta también para refutar la concepción en cuestión. Lo que puede hacerse es señalar esto: se sigue que una prueba del carácter tautológico (en un lenguaje adecuado) de los axiomas matemáticos es al mismo tiempo una prueba de su consistencia, pero por los metateoremas mencionados esto no puede lograrse con medios *más débiles* de prueba que los ya contenidos en esos axiomas mismos. Esto no quiere decir que *todos* los axiomas de un sistema dado deban usarse en su prueba de consistencia. Por el contrario, los axiomas de fuera del sistema que son necesarios hacen habitualmente posible prescindir de algunos de los axiomas del sistema (aunque aquéllos no impliquen a éstos)[NG26].

[[Sin embargo, lo que se sigue con certeza práctica es esto: con objeto de probar la consistencia de la teoría clásica de números (y *a fortiori* de todo sistema más potente) deben usarse ciertos conceptos abstractos (y los axiomas evidentes directamente referidos a ellos), donde «abstractos» significa no referidos a objetos sensibles[NG27], de los que los símbolos son un tipo

---

[NI2] [[IEE. Supongamos, por ejemplo, que alguien posee un sexto sentido que le aporta sólo unas pocas percepciones, y que éstas no tienen ninguna conexión causal con las percepciones de los otros sentidos. En ese caso, podría incorporar esas percepciones en unas pocas reglas sintácticas que podría probar como tautológicas (esto es, sin consecuencias para las otras percepciones), usando en la prueba las propiedades [?] percibidas de las percepciones de su sexto sentido. Pienso que este símil expresa muy bien tanto la relación de la razón con los sentidos como el valor de verdad de las teorías que pretenden probar que la razón es tautológica]].

[NG26] Por ejemplo, cualquier sistema de axiomas S para la teoría de conjuntos perteneciente a la serie explicada al inicio de la conferencia, incluido el axioma de elección, puede probarse que es consistente utilizando el axioma de orden superior (o por medio del axioma de que S es consistente). De manera similar, no es imposible que pudiera demostrarse la consistencia de los axiomas de orden inferior por medio de axiomas de mayor nivel que tengan, sin embargo restricciones tales que sean aceptables para los intuicionistas.

[NG27] Tales conceptos abstractos son, por ejemplo, «conjunto», «función de enteros», «demostrable» (este último en el sentido no formalista de «cognoscible como verdadero»), «derivable», etc., o finalmente «existe», referido a todas las combinaciones *posibles* de símbolos. La necesidad de tales conceptos para la prueba de consistencia de la matemática clásica surge del hecho de que los símbolos pueden ser puestos en correspondencia con los enteros, y por tanto la teoría de números finitaria (y *a fortiori* la clásica) contiene todas las

especial. Estos conceptos abstractos no son sin embargo sintácticos (sino más bien aquellos cuya justificación mediante consideraciones sintácticas debiera constituir la principal tarea del nominalismo). De aquí se sigue que *no existe justificación racional de nuestras creencias precríticas sobre la aplicabílidad y la consistencia de la matemática clásica (ni siquiera de su nivel más bajo, la teoría de números) sobre la base de una interpretación sintáctica.*

[[Es verdad que este enunciado no vale para ciertos subsistemas de la matemática clásica, que pueden contener incluso alguna *parte* de la teoría de los conceptos abstractos mencionados. En este sentido, el nominalismo puede señalar algunos éxitos parciales, pues es de hecho posible basar los axiomas de esos sistemas en consideraciones puramente sintácticas [[IEE. (sin uso alguno de conceptos «abstractos».)]]. De esta forma el uso de los conceptos «todos» y «existe», referidos a enteros, puede justificarse (esto es, puede probarse como consistente) por medio de consideraciones sintácticas. Sin embargo, para el axioma más esencial de la teoría de números, el de inducción completa, la fun-damentación sintáctica, incluso dentro de los límites en que es factible, no ofrece justificación alguna de nuestra creencia precrítica en él, puesto que este axioma mismo ha de usarse en las consideraciones sintácticas[NG28].

[[El hecho de que, cuanto más modestos somos con respecto a los axiomas para los que deseamos establecer una interpretación sintáctica, menos matemáticas necesitamos para hacerlo, tiene la consecuencia de que si finalmente somos tan modestos como para limitarnos a algún dominio finito, por ejemplo, a los enteros hasta 1.000, entonces las proposiciones matemáticas válidas en ese campo pueden interpretarse como tautológicas incluso en sentido estricto, es decir; como reducibles a tautologías explícitas mediante definiciones explícitas de los términos. Ello no es sorprendente, porque el fragmento de matemática necesario para la prueba de consistencia de esta matemática finita está ya contenido en la teoría de los procesos combinatorios finitos que son necesarios para reducir una fórmula a una tautología explícita mediante sustituciones.

[[Esto explica el bien conocido, aunque confuso, hecho de que fórmulas como 5 + 7 = 12 puedan reducirse a tautologías explícitas mediante ciertas definiciones. Este hecho, incidentalmente, es también confuso porque en tales reducciones (si es que éstas se interpretan como simples sustituciones del *definiendum* por el *definiens* sobre la base de definiciones explícitas) el + no es idéntico al + ordinario, pues puede definirse sólo para un número finito de argumentos (por enumeración de este número finito de casos). (Si, por otro lado, + se define contextualmente, entonces el concepto de multiplicidad finita ha de usarse ya en la prueba de 2 + 2 = 4.) Una circularidad similar [[IEE. a la

---

pruebas que pueden basarse en ellos. Hasta ahora la evidencia de este hecho no es absolutamente concluyente porque los axiomas evidentes sobre los conceptos no abstractos en consideración no han sido investigados de forma suficientemente minuciosa. Sin embargo, el hecho en sí es reconocido incluso por destacados formalistas.

[NG28] La objeción surgida aquí contra la fundamentación sintáctica de la teoría de números es sustancialmente la misma que Poincaré dirigió contra la fundamentación de la teoría de números de Frege y contra la de Hilbert. Sin embargo, esta objeción no se justifica contra Frege porque los conceptos y axiomas que él tenía que presuponer no contenían explícitamente el concepto de «multiplicidad finita» y sus axiomas, mientras que los conceptos y consideraciones gramaticales necesarios para establecer las reglas sintácticas y su carácter tautológico sí que los contienen.

que acabo de señalar en la reducción de 5 + 7 = 12 a una identidad explícita[NI3]]] tiene también lugar en la prueba de que p $\vee \neg p$ es una tautología, porque la disyunción y la negación aparecen también en ella en sus significados intuitivos.]]

[Nota de Gödel tras la omisión de los textos tachados acabados de transcribir: «Comenzar»]

[[IEE. Hasta ahora mis consideraciones sobre el platonismo han sido principalmente *apagoge* [así llama Aristóteles a la reducción al absurdo en *Anal. Pr.* i. 6, 28b2], es decir, he tratado de refutar la concepción contraria en sus diversas formas. Cómo conclusión de esta conferencia me gustaría describir de forma positiva y con algún detalle la concepción acerca de la naturaleza de la matemática a la que en mi opinión los modernos desarrollos en los fundamentos nos conducen. Creo que ello puede ser llevado a cabo mejor... [?] la concepción que he estado criticando.]]

La esencia de esta concepción es que no existen cosas tales como los hechos matemáticos, y que la verdad de las proposiciones mediante las que creemos expresar hechos matemáticos se debe sólo a un huero funcionar del lenguaje (en virtud de reglas más bien complicadas que definen el significado de las proposiciones, es decir, que determinan bajo qué circunstancias es verdadera una proposición dada), mediante el cual dichas reglas hacen verdaderas a aquellas proposiciones con independencia de lo que los sean los hechos. Tales proposiciones pueden correctamente describirse como vacías de contenido. Entonces, es de hecho posible construir un lenguaje en el que las proposiciones matemáticas carezcan de contenido en este sentido.

El problema es sólo que: 1. para mostrar que los hechos matemáticos no existen han de usarse los mismos hechos matemáticos[NEI] (u otros igualmente complicados); 2. mediante este método, si se dividen los hechos empíricos en dos partes *A* y B, tales que 8 no implique nada en *A,* puede construirse un lenguaje en el que las proposiciones que expresen *B* carezcan de contenido. Y si nuestros adversarios objetaran que estaríamos así ignorando ciertos hechos observables *B*, podríamos responder que ellos hacen lo mismo, por ejemplo, con la ley de inducción completa, que percibimos como verdadera sobre la base de nuestra comprensión (esto es, percepción) del concepto de número entero. Además, se ve fácilmente que para cualquier división de los hechos *empíricos* en dos clases *A* y *B*, tales que los hechos de *B* no impliquen nada acerca de los de *A*, podríamos construir un lenguaje, usando sólo los hechos de *B*, en el que las proposiciones que expresaran los hechos de *B* estuvieran «vacías de contenido» y fueran verdaderas sólo en virtud de reglas semánticas.

Sin embargo, me parece que a pesar de ello hay un ingrediente en esta concepción errónea de la verdad matemática que es perfectamente correcto y

---

[NI3] [[IEE. Esta circularidad no implica que (como Poincaré ... [?]) la derivación fregeana de tales ecuaciones a partir de axiomas lógicos o conjuntistas contenga un círculo vicioso (cf. nota [?]). [[pues para Frege, a diferencia del nominalismo, una inferencia no es una operación combinatoria de ciertas combinaciones de *símbolos* (que implica el concepto de multiplicidad finita), sino una intuición acerca de los *conceptos* lógicos que aparecen en ella.]]]]

[NEI] En la pg. 29' *[NT: del manuscrito original]* del texto manuscrito por Gödel aparece en este punto una observación no numerada citada. Realmente es una anotación taquigráfica, mas que una nota al pie o una marca para un inserto de texto. Una transcripción se da en las Notas Textuales.

de hecho revela la verdadera naturaleza de la matemática. A saber: es correcto proclamar que las proposiciones matemáticas no dicen nada acerca de lo físico o psíquico que exista en el espacio y el tiempo, porque son ya verdaderas en virtud del significado de los términos que aparecen en ellas, con independencia del mundo de las cosas. Lo erróneo, sin embargo, consiste en decir que el significado de los términos (o sea, los conceptos que éstos denotan) sea algo hecho por nosotros y consista meramente en convenciones semánticas.

Creo que la verdad es que esos conceptos forman una realidad objetiva por sí mismos, la cual no podemos crear o cambiar, sino sólo percibir o describir[NG29]. Por tanto, las proposiciones matemáticas, aunque no digan nada acerca de la realidad espacio-temporal, pueden sin embargo poseer un contenido objetivo sólido, en la medida en que digan algo acerca de la relaciones entre los conceptos. La existencia de relaciones no «tautológicas» entre los conceptos de la matemática aparece [[IEE no tanto en el hecho trivial de que tanto para la matemática como para la sintaxis deban necesariamente asumirse ciertos primitivos, esto es, ciertas ideas indefinibles, sino]] sobre todo en el hecho de que para los términos primitivos de la matemática deben asumirse axiomas que de ningún modo son tautologías, en el sentido de ser reducibles a $a = a$, sino que se siguen del significado del término primitivo en consideración.

Por ejemplo, el axioma básico, o más bien el esquema axiomático, para el concepto de conjunto de enteros dice que, dada una propiedad bien definida de los enteros (es decir, una expresión proposicional φ(n) con una variable entera n), existe el conjunto *M* de aquellos enteros que poseen la propiedad φ. Considerando ahora la circunstancia de que φ pueda ella misma contener el término «conjunto de enteros», nos encontramos aquí con una serie de axiomas bastante complejos sobre el concepto de conjunto. No obstante, esos axiomas (como muestran los resultados mencionados) no pueden reducirse a nada sustancialmente más simple, no digamos a tautologías explícitas. Es cierto que tales axiomas son válidos en virtud del significado del término «conjunto»; podría incluso decirse que expresan el verdadero significado del término conjunto, y que por tanto podrían ser adecuadamente calificados de analíticos; sin embargo, el término tautológico, es decir vacío de contenido, está aquí fuera de lugar; porque incluso la afirmación de la existencia de un concepto de conjunto que satisface aquellos axiomas (o de la de su consistencia) está tan lejos de carecer de contenido que no puede percibirse [?] *[NT: La edición inglesa dice: "... contenido que no pueda demostrarse sin ..."]* sin usar de nuevo el concepto mismo de conjunto, o algún otro concepto abstracto de naturaleza similar.

Este argumento particular se dirige por supuesto sólo a los matemáticos que admiten el concepto de conjunto en la matemática propiamente dicha. Sin embargo, para los finitistas cabría aducir el mismo argumento a propósito del concepto de entero y del axioma de inducción completa. Pues, si *no* se admite el concepto general de conjunto en la matemática propiamente dicha, entonces la inducción completa debe tomarse como axioma. [[IEE. No creo que a esta

[NG29] Esto vale también para aquellas partes de la matemática que *pueden* reducirse a reglas sintácticas (véase más arriba), pues tales reglas se basan en la idea de multiplicidad finita (esto es, de una secuencia finita de símbolos), y esta idea y sus propiedades son enteramente independientes de nuestra libre elección. De hecho su teoría es equivalente a la teoría de los enteros. La posibilidad que esta teoría incorpora de construir así un lenguaje en forma de reglas sintácticas no prueba nada. Véase la nota [?].

concepción sobre la analiticidad de la matemática pueda objetarse que una proposición matemática indecidible, cuya verdad pueda reconocerse al menos de forma probable, no puede ser analítica. Pues estoy usando el término, no en.]] Deseo repetir que aquí analítico no quiere decir [[IEE. el sentido subjetivista de]] «verdadero en virtud de nuestras definiciones», sino más bien [[IEE. en el sentido objetivista de]] «verdadero en virtud de la naturaleza de los conceptos concurrentes»; a diferencia de [[IEE. sintético, que significaría]] «verdadero en virtud de las propiedades y el comportamiento de las cosas».

Este concepto de analítico está tan lejos de significar «vacío de contenido» que es perfectamente posible que una proposición analítica sea indecidible (o decidible sólo de forma probable). Pues nuestro conocimiento del mundo de los conceptos puede ser tan limitado e incompleto como el que tenemos del mundo de las cosas. Es cierto e innegable que este conocimiento es (en ciertos casos), no sólo incompleto, sino incluso indiferenciado, Esto tiene lugar en las paradojas de la teoría de conjuntos, que se aducen frecuentemente como una refutación del platonismo, aunque en mi opinión de forma completamente injusta. Nuestras percepciones visuales contradicen a veces nuestras percepciones táctiles, por ejemplo en el caso de una vara inmersa en agua, pero nadie en su sano juicio concluiría de ello que el mundo externo no existe.

Desde luego no pretendo que las consideraciones anteriores equivalgan a una prueba real de esta concepción acerca de la naturaleza de la matemática, Lo más que podría afirmar sería haber refutado la concepción nominalista, que considera que la matemática consiste solamente en convenciones sintácticas y sus consecuencias. Además, he aducido algunos potentes argumentos contra la concepción más general según la cual la matemática es una creación nuestra. Sin embargo, existen otras alternativas al platonismo, en particular el psicologismo y el realismo aristotélico. A fin de demostrar la verdad del realismo platónico tales teorías han de refutarse una tras otra, y entonces debería mostrarse que agotan todas las posibilidades. No estoy ahora en posición de hacer [[IEE. concluyentemente]] esto; sin embargo, me gustaría ofrecer algunas indicaciones en esa línea.

Una forma posible de psicologismo admite que la matemática investiga las relaciones entre los conceptos, y que los conceptos no pueden crearse a voluntad, sino que nos son dados como una realidad que no podemos cambiar; sin embargo, afirma que tales conceptos son sólo [[IEE. estructuras o]] disposiciones psicológicas [[IEE. en nuestras mentes]], es decir, que no son nada, sino las ruedas de nuestra máquina pensante, por así decir Para ser más preciso, un concepto consistiría entonces en la disposición a: 1. tener cierta experiencia mental cuando pensamos en él, y *2.* aprobar ciertos juicios (o tener ciertas experiencias de conocimiento directo) acerca de sus relaciones con otros conceptos y con objetos empíricos.

La esencia de esta concepción psicologista es que el objeto de la matemática no es nada más que el conjunto de leyes psicológicas según las cuales los pensamientos, las convicciones, etc., tienen lugar en nosotros, en el mismo sentido en que el objeto de otra parte de la psicología es el conjunto de leyes según las cuales las emociones tienen lugar en nosotros. La principal objeción a esta concepción que se me ocurre en este momento es que si fuera correcta no poseeríamos conocimiento matemático alguno. No sabríamos, por ejemplo, que 2 + 2 = 4, sino sólo que nuestra mente está constituida de tal

forma, que acepta la verdad de tal enunciado, y que no habría entonces razón alguna para que, a través de otra línea de pensamiento, no pudiéramos llegar a la conclusión opuesta con el mismo grado de certeza. Por tanto, quienquiera que afirme la existencia de algún dominio, por pequeño que sea, de proposiciones *matemáticas* que *sepamos* ciertas, no pueda aceptar esta concepción.

[[IEE. Otra forma de psicologismo dice que no son los conceptos matemáticos, sino los objetos a los que ellos se refieren, los que tienen un carácter puramente subjetivo o menta, por ejemplo, el de ser operaciones de la mente, tales como pasar al siguiente número entero al contar. Si, según este punto de vista, se mantiene que las proposiciones acerca de esas entidades mentales son analíticas (en cualquier sentido de este término), entonces [[también se es un platónico[NI3]]] debe afirmarse que nuestro conocimiento de (as proposiciones analíticas se limita a las proposiciones que se refieren a fenómenos mentales, lo cual [[si se acepta el platonismo]] me parece completamente antinatural e inaceptable. Si, por otro lado, se mantiene que las proposiciones acerca de esas entidades mentales son sintéticas, es difícil ver cómo puede conocerse cualquier proposición matemática universal, excepto por generalización inductiva.[NI4]]]

[[IEE. Respecto a la concepción correspondiente al realismo aristotélico [[(que afirma que los conceptos son partes o «aspectos» de cosas espacio-temporales) me parece que difícilmente podrá ofrecer una explicación satisfactoria de los conceptos pertenecientes a niveles superiores al primero (y todos los conceptos matemáticos son así)]], difícilmente podrá mantenerse que los objetos de la matemática son objetos singulares de la naturaleza (tales como montones de piedras). Sin embargo, si se afirma que los objetos de la naturaleza con los que trata la matemática son cualidades (y relaciones), entonces han de afrontarse todas las dificultades relacionadas con la concepción aristotélica de que las cualidades *y* las relaciones son partes (abstractas) de las cosas. En particular, la transitividad de la relación de parte parece implicar que las cualidades de cualidades son cualidades de las cosas. Además, es muy difícil pensar en todos los mundos posibles como partes del mundo real. No he clarificado satisfactoriamente aún todos los aspectos de estas cuestiones. Desde luego, todas estas consideraciones son más bien vagas.]]

Tengo la impresión de que tras suficiente clarificación de los conceptos

---

[NI3] [[IEE. Como se señaló en la nota [?], la mera suposición de que los conceptos son algo objetivo (esto es, extramental), no significa todavía realismo platónico, sino más bien una disyunción de esta concepción y el conceptualismo aristotélico [[que los conceptos son elementos (o «partes abstractas») del mundo espacio-temporal, que conocemos mediante la aplicación de nuestra facultad mental de analizar (o abstraer) al material aportado por los sentidos]]. Sin embargo, en esta teoría no parece posible ninguna otra proposición a priori acerca de los conceptos, excepto aquellas que establecen relaciones parte-todo entre esos constituyentes, es decir, aquellas que pueden reducirse a tautologías explícitas. De aquí que como consecuencia de la naturaleza no tautológica de los axiomas matemáticos (véase más arriba), el conceptualismo aristotélico [[parezca implicar que la naturaleza sintética de la matemática no puede sostenerse]] no sea aplicable a la matemática.]]

[NI4] [[IEE. Kant sostuvo esa posibilidad en virtud de su intuición «pura», cuya función es hacernos presente una totalidad de objetos *singulares* (esto es, puntos, líneas, etc.), de tal manera que, a diferencia de las percepciones sensibles, podamos entender directamente las proposiciones generales, con independencia de esa percepción, sin ninguna extrapolación o inducción. ... [?].]]

en cuestión será posible conducir estas discusiones con rigor matemático, y de que el resultado será entonces que (bajo ciertas hipótesis que difícilmente pueden negarse —en particular la hipótesis de que existe absolutamente algo como el conocimiento matemático) la concepción platónica es la única sostenible. Con ello me refiero a la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto de los actos como de las disposiciones de la mente humana, y que es sólo percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta. Esta concepción es más bien impopular entre los matemáticos, aunque algunos de los grandes la han adoptado, por ejemplo Hermite, que escribió una vez lo siguiente:

> Existe, si no me equivoco, todo un mundo que es el conjunto de las verdades matemáticas, al que no tenemos acceso más que por la inteligencia, al igual que existe el mundo de las realidades físicas; ambos son independientes de nosotros y de creación divina.[NG30]

[NG30] Cf G. Darboux, [*Eloges ocadem. et discours,,* 1912, p. 142]. El pasaje citado continúa como sigue: «que no parecen diferentes más que a causa de la debilidad de nuestra mente y que para un pensamiento más potente no son sino una sola y la misma cosa, cuya síntesis se revela parcialmente en la maravillosa correspondencia que existe entre la matemática abstracta, de una parte, y la astronomía y todas las ramas de la física de la otra» [en francés, en el original]. Así, Hermite parece aquí inclinarse hacia el realismo aristotélico. Sin embargó lo hace sólo de forma metafórica, ya que el platonismo permanece como la única concepción comprensible para la mente humana.

Apéndice: interpolaciones y notas sueltas

[Contiene diversas interpolaciones y notas que, al igual que las que he ido intercalando en el texto precedente a través de corchetes dobles, fueron finalmente desechadas por Gödel, o incluso también tachadas, pero que, a diferencia de ellas, no he podido determinar su lugar original en el texto. Se trata de un material a menudo comprensible por sí mismo, y en muchos casos susceptible de ser relacionado con ideas que aparecen aquí y allá en el texto anterior, y por supuesto siempre interesante. Conservo su número original aunque sólo sea para preservar el orden en que fueron escritas y dar al menos alguna idea de su relación con el texto.]

Interpolaciones

15. [[Existe una forma más suave (y no tan completamente absurda) de empirismo (defendida por Aristóteles) según la cual los conceptos (esto es, las propiedades) son partes de las cosas (y por tanto no tan diferentes de su ... [?] espacial) que llegan a nuestro conocimiento mediante los sentidos. ... [?]. Las proposiciones lógicas o matemáticas, sin embargo, no son empíricamente verdaderas, sino que establecen sólo esta relación de la parte al todo.]]

17. Uno podría sin embargo decir que a fin de desarrollar la concepción nominalista no se necesita una *prueba* matemática de este hecho, sino que la evidencia empírica (obtenida al extraer las consecuencias de las reglas sintácticas) es suficiente. [[En este sentido restringido, el punto de vista nominalista puede de hecho sostenerse (tomando como una de las reglas semánticas que todo lo derivable de los axiomas matemáticos —arbitrariamente escogidos— es verdadero).]] Pero a esta sugerencia debe objetarse que [[en este sentido puede hacerse tautológica no sólo la matemática, sino toda la ciencia (también la física)]] el mismo hecho en cuestión (o mejor, la proposición que lo expresa), o sea, que las reglas semánticas no implican proposiciones empíricas, por un lado, que tal proposición no es empírica de acuerdo con la propia interpretación nominalista de las proposiciones matemáticas (no dice nada acerca del mundo espacio temporal ... [?]), y, por otro lado, que no es tautológica, en cuyo caso tendría que ser demostrable mediante el análisis del contenido de las reglas sintácticas (mientras que por el axioma bajo el cual nosotros ... [?] indemostrable). Así, la concepción semántica (en esta formulación) presupone precisamente uno de los hechos matemáticos cuya no existencia desea probar [?].

21, [[La razón por la que (en mi opinión) la exclusión del empirismo, junto con la objetividad de la matemática, conduce a algo como el platonismo, es que poseemos las dos categorías de «cosa» y «concepto», tomadas ambas en el sentido más amplio (es decir, las de actualidad y posibilidad) ... [?].]]

24. Para ser más precisos, se afirma que el significado de los símbolos matemáticos está completamente contenido en las reglas hechas por los humanos que gobiernan su uso, y que los teoremas matemáticos son aquellas proposiciones que son verdaderas en virtud de las convenciones lingüísticas sobre el uso de los símbolos que aparecen en ellas.

26. En segundo lugar, los nominalistas podrían decir que, bajo la

suposición de que los objetos y hechos matemáticos son creaciones libres, la existencia de una proposición indecidible es algo imaginable. Significa sólo que mediante nuestros actos creativos no hemos determinado los objetos en todos sus aspectos, y por tanto hemos de suplementar esos actos por otros nuevos que determinen, por ejemplo, si *p* o no-*p* es verdadero (en el caso de que *p* sea indecidible). Este argumento, una vez generalizado, parece muy convincente; sin embargo, aplicado a cierta ... [?] situación se convierte en ... [?]. Esto es, puesto que la cuestión de la consistencia del sistema matemático creado es en particular una de las proposiciones indecidibles del sistema, entonces el argumento dice aquí que podemos decidir sobre la consistencia de un sistema arbitrario mediante una nueva suposición arbitraria.

28. En contradicción directa con la concepción nominalista, que desea limitarse en sus presuposiciones a un subsistema definido (y muy pequeño) de la matemática, a saber el que trata (de forma finitaria) con combinaciones finitas de objetos discretos (los símbolos). Por tanto, esta base es demostrablemente insuficiente incluso para la prueba de consistencia de la teoría de números (porque ésta está contenida en la matemática). [Nota al pie:] El punto decisivo al respecto es que para esta proposición —y *a fortiori* para todas las necesarias para lograr la prueba de consistencia— deben usarse axiomas sobre ciertos conceptos abstractos. La esencia del nominalismo es que no acepta tales conceptos abstractos en sí mismos, sino sólo en la medida en que ellos pueden interpretarse en términos de símbolos y objetos sensibles. Pero tal interpretación se demuestra como imposible excepto para un fragmento muy pequeño de la matemática, con tal de que se requiera de una interpretación que deba ofrecer un fundamento racional para nuestras creencias precríticas (lo cual es el motivo mismo de cualquier interpretación tal).

Notas

11. Este argumento no es válido para los finitistas, porque tal concepción rechaza explícitamente cualquier concepto general de conjunto o función de enteros, incluso en el sentido intuicionista restringido de función constructible o computable. Sin embargo, una situación similar predomina en la matemática finitaria en la medida en que para probar ciertas proposiciones sobre ciertas funciones (tales como + y $\times$) deben introducirse otras funciones (recursivamente definidas) (tales como la exponenciación), y en la matemática finitaria las definiciones por inducción no pueden considerarse como meras abreviaturas, sino que cada una de ellas constituye ... [?].

12. Pues a fin de lograr una interpretación de la matemática debe requerirse que se siga de las reglas semánticas, no sólo que los axiomas matemáticos son verdaderos, sino también que sus negaciones no lo son, o al menos ... [?] similar debe hacerse. [[Porque si las reglas semánticas sobre los conceptos lógicos y matemáticos no son sino meros recursos para asociar a la realidad nuevos tipos de expresiones de un modo más útil, aunque más complicado, del que resulta al establecer los hechos empíricos singulares mediante proposiciones atómicas (tales como «esto es rojo»), entonces tales reglas no deben ciertamente permitirnos deducir nuevas proposiciones atómicas, como sería el caso si ellas implicaran una contradicción.]] Porque los axiomas en cuestión no serían ciertamente tautológicos (esto es, vacíos de

contenido) si implicaran proposiciones empíricas, como sería el caso si implicaran una contradicción, pues entonces se seguiría cualquier proposición empírica. [[Es claro también que si la matemática consiste meramente en convenciones lingüísticas entonces *debe* ser imposible que implique proposiciones empíricas.]] De aquí que a fin de probar el carácter tautológico de los axiomas matemáticos no sea suficiente con mostrar que se siguen de reglas sintácticas en un lenguaje adecuadamente construido, sino que además debe probarse que esas reglas son tales que no implican ninguna proposición empírica, como por ejemplo «esto es rojo».

14. Incluso en este caso la matemática subjetiva sería también incompletable en el siguiente sentido. Si algunas de las proposiciones matemáticas indecidibles fuera decidida mediante un argumento probable (véase más arriba) y fueran entonces añadidas como nuevos axiomas, entonces otras proposiciones del mismo tipo permanecerían irresolubles, así que el proceso de añadir nuevos axiomas de este modo no terminaría nunca.

21. [[Asumir que los conceptos son algo más que disposiciones mentales no es todavía platonismo, porque los conceptos podrían considerarse como algo en las cosas, o como partes de las cosas (no muy diferentes de sus partes espaciales) que llegan a nuestro conocimiento mediante los sentidos (externos o internos). Esta teoría aristotélica, no obstante (sin mencionar las dificultades halladas respecto a las relaciones) parece entrañar la difícilmente sostenible consecuencia (que está en contradicción evidente con la observación interna) de que cada concepto (incluidos los primitivos) debería tener tantas partes como afirmaciones diferentes existen sobre él, y además también partes que implicaran el concepto mismo.

22. Esto puede identificarse con la concepción kantiana, excepto en que según Kant las entidades mentales implicadas no son operaciones, sino estructuras permanentes en la mente, a saber; el espacio y el tiempo, cuyos elementos individuales, u otros constituyentes, se perciben mediante la «intuición pura». Además, según la *Crítica de la razón pura* también los conceptos matemáticos son subjetivos, puesto que se obtienen por la aplicación de categorías puramente subjetivas del pensamiento a los objetos de la intuición. No así según el escrito temprano de Kant «De *mundi* [*sensibilis atque intelligibilis forma* et *principas,* 1770]», donde sólo el mundo de los sentidos (incluyendo sus formas, espacio y tiempo) se considera como el fenómeno subjetivo al que el pensamiento abstracto le comunica el conocimiento de las cosas en sí mismas. El escrito citado es también interesante porque evita la defectuosa analogía: «aritmética/tiempo = geometría/espacio», y en su lugar sostiene que la intuición del tiempo da lugar a la ciencia de la cinemática, mientras que el concepto de número se considera perteneciente a la esfera del pensamiento abstracto y necesitado de la intuición pura (del tiempo o del espacio) sólo para su *«actuatio in concreto»* (cf. § 12 del escrito citado).

23. La redacción de la definición kantiana de «analítico» ofrecida en *Proleg.,* § 2a concuerda mejor con este concepto de analiticidad que el concepto de tautología, puesto que Kant define una proposición como analítica «si en el predicado no dice nada sino aquello que ha sido realmente pensado de forma no tan clara y consciente en el concepto de sujeto». A fin de aproximarse al concepto moderno de tautología, Kant debería haber exigido que el predicado estuviera contenido en la *definición* del sujeto. Evidentemente

pensamos algo bajo los conceptos indefinibles. De aquí que debieran existir proposiciones analíticas no vacías también sobre ellos. Pero no pueden existir tautologías sobre ellos (excepto tautologías explícitas tales como *a* = *a*), puesto que carecen de definición. La definición kantiana citada se acomoda literalmente a los dos ejemplos dados en el texto si la totalidad de los conjuntos de enteros (o la totalidad de los enteros) se hace ser el sujeto de los enunciados que expresan los axiomas. Sin embargo, todo esto se aplica sólo a la redacción de la definición kantiana citada, mientras que a juzgar por otros pasajes de sus escritos (cf. en particular *Logik* §§ 36, 37) aparece claramente que el concepto de «analítico» en e que estaba realmente pensando concuerda en esencia con el concepto moderno de «tautológico».

26. [[Podría preguntarse; ¿no es suficiente que el carácter tautológico de la matemática se siga de la verdad de la matemática? Pues esto parece significar [?] que la matemática debe ser o rechazada o considerada tautológica. Pero podemos replicar dos cosas a semejante objeción, 1. En aquellas partes de la matemática que necesitan conceptos abstractos para su prueba de consistencia (véase nota [?]) *no* se satisface en absoluto la condición establecida en la página [?] (la cual se necesita a fin de que el sistema [?] semántico sea sostenible), puesto que la verdad de los axiomas matemáticos *no* se sigue de las reglas semánticas *solas,* sino sólo de tales reglas más ciertas propiedades de los conceptos abstractos que no tienen nada que ver con la semántica (por el contrario, si la concepción semántica fuera correcta son tales conceptos los que tendrían que ser reducidos a la semántica en primer lugar Pero si uno trata de hacerlo, entonces los sustitutos semánticos se quedan cortos respecto a los conceptos abstractos que deben representar, y ello es necesariamente así según lo explicado). 2. Respecto a los subsistemas de la teoría de números (véase nota [?]) debe observarse que no es su carácter tautológico lo que puede probarse, sino sólo la existencia de una interpretación tautológica, que no excluye la existencia de otras interpretaciones. De aquí que otro requisito necesario para la concepción semántica en este caso sea que la interpretación tautológica sea al menos suficiente para todos los fines. Pero precisamente éste no es el caso, ya que para el establecimiento de la interpretación tautológica se presupone la interpretación intuitiva (referida a los símbolos), y la interpretación tautológica no es en modo alguno sólo una forma de hacer precisa la intuitiva, porque aunque las dos concuerdan entre sí extensionalmente, es decir; hacen verdaderas las mismas proposiciones, sin embargo, en la última imaginamos indudablemente que la matemática es tan objetiva como la física.]]

Podría preguntarse: ¿no es suficiente al menos [?] una refutación del realismo según la cual el carácter tautológico de la matemática pueda concluirse a partir de la matemática misma? Pues tal inferencia, aunque no sea obligatoria para los nominalistas, que han de dejar la validez de la matemática en suspenso hasta que logren derivarla sobre la base de sus presuposiciones filosóficas, tendrá que ser reconocida al menos por los realistas, y por tanto implicarlos en autocontradicción, Esta conclusión sería correcta si en este sentido «tautología» significara «vacío de contenido». Sin embargo, lo que (por definición) significa es [[dos cosas: 1. que la matemática se sigue, en un lenguaje adecuado, de las reglas sintácticas de ese lenguaje, y 2. que esas reglas carecen de consecuencias en el dominio de la realidad espacio-temporal. Pero la segunda circunstancia significa carencia de contenido sólo si

(mediante una *petitio principii)* hecho se identifica con hecho empírico. Sin embargo la primera puede fácilmente llevarse a cabo (si «regla sintáctica» se entiende con la generalidad explicada en la nota [?]) para cualquier teoría (o sistema de proposiciones) que se sabe (o se supone) verdadera en el momento en que se define el lenguaje (excepto en que si hay demasiadas afirmaciones independientes en esta teoría, su incorporación como reglas sintácticas haría el lenguaje intolerablemente complicado.)]] que *existe un lenguaje* en el que la matemática resulta vacía de contenido en *la medida en que* se sigue de las reglas de la sintaxis.

Sin embargo, esto significa muy poco, ya que la división de las proposiciones verdaderas en aquellas que son expresadas por reglas sintácticas y aquellas a las que se llega mediante definiciones ... [?] es completamente arbitraria, excepto en que las primeras: 1. deben conocerse (al menos a través de los principios de los que se siguen) en el momento en el que el lenguaje se construya, y 2. deben estar lo suficientemente desconectadas de las segundas como para evitar el conflicto entre las dos clases de reglas. De aquí que si, por ejemplo, todas las verdades astronómicas se siguieran de unos pocos axiomas, y no existiera además ninguna correlación entre las direcciones en el celo y en la tierra, entonces los axiomas de la astronomía podrían incorporarse como reglas sintácticas *y* las definiciones demostrativas [?] restringirse a los objetos terrestres. Esto haría tautológica a la astronomía. No obstante, no implicaría pérdida alguna en el conocimiento astronómico, sino sólo un cambio en la interpretación de la astronomía. Este procedimiento tendría incluso más éxito para la astronomía que para la matemática, porque la astronomía misma no sería necesaria para justificar las reglas sintácticas mediante su consistencia. Es cierto que en el caso de la matemática lo representado por las reglas sintácticas (si se hace en la línea de Ramsey; cf. [?]) es fácil y, por así decir, «natural». Por tanto se justifica la conclusión de que existe una estrecha relación entre la matemática y el lenguaje. Además, a la luz de los hechos presentados en esta conferencia, deberíamos concluir, no que el lenguaje se ha quedado pequeño para la matemática, sino más bien que el lenguaje es posible sólo mediante la matemática.

27. [[Es posible mantener la objetividad (esto es, el carácter extramental [?]) de los conceptos y sin embargo rechazar el platonismo si se asume algo como la teoría explicada en la segunda mitad de la nota (excepto que ahora el sentido interno —esto es, la facultad de autopercepción interna— toma el lugar de los sentidos externos.]]

35. Para ser más precisos, la verdadera situación, como opuesta a la concepción criticada, es la siguiente: 1. Los significados de los términos matemáticos no son reducibles a las reglas lingüísticas sobre su uso, excepto para un dominio muy restringido de la matemática; 2. Incluso cuando tal reducción es posible las reglas lingüísticas no pueden considerarse como hechas por los humanos, y las proposiciones sobre ellas como carentes de contenido objetivo, porque tales reglas están basadas en la idea de multiplicidad finita (bajo la forma de secuencias finitas de símbolos), y esta idea (con todas sus propiedades) es enteramente independiente de cualquier convención y libre elección (de ahí que sea algo objetivo). De hecho su teoría equivale a la aritmética.

37. La principal diferencia entre el finitismo (en el sentido de Hilbert) y el intuicionismo [[es que: 1. El finitismo restringe la aplicación de las conectivas

preposicionales ($\neg$, $\rightarrow$, etc.) a proposiciones decidibles (excepto desde luego en la medida en que su significado pueda definirse en términos de otras ideas admitidas); 2. El finitismo introduce]] es que el segundo 1. no admite conceptos «abstractos» (tales como «no», «implica», «existe», «función [?] de enteros», ni los axiomas referidos a ellos) como términos primitivos (o axiomas) de la matemática propiamente dicha. [[2. admite como objetos de la matemática propiamente dicha sólo objetos de complejidad finita (y penetrables intuitivamente), tales como los enteros o las secuencias finitas de símbolos y conceptos definibles para ellos sin usar la cuantificación transfinita (es decir, definibles sólo por inducción), sino que permanece dentro del dominio de «... [?]». *Cf* la nota [?].]]

45. Si, por ejemplo, algún axioma matemático nuevo tuviese un gran número de consecuencias a las que se pudiese llegar fácilmente, y que fuesen verificables de forma separada sin hacer uso de este axioma, habría entonces tanta razón para creerlo verdadero como la existente para una ley establecida de la física. No obstante, podría por otras razones ser muy improbable que semejante axioma pudiera probarse (o probarse su consistencia) mediante métodos constructivos.

48. Sin embargo, si los nominalistas renunciasen a la prueba y estuviesen satisfechos con la evidencia empírica de este hecho, entonces estarían reconociendo que la totalidad de su teoría está precisamente basada en uno de los hechos matemáticos objetivamente subsistentes cuya inexistencia desean probar.